

## Exercice 3

4,75 points

Dominique répond à un QCM comportant 10 questions. Pour chaque question, il est proposé 4 réponses dont une seule est exacte. Dominique répond au hasard à chacune des 10 questions en cochant, pour chaque question, exactement une case parmi les 4. Pour chacune des questions, la probabilité qu'il réponde correctement est donc  $\frac{1}{4}$ .

On note  $X$  la variable aléatoire qui compte le nombre de bonnes réponses à ce QCM.

1. Pour chaque question, il y a deux issues possibles : Dominique donne la bonne réponse, avec une probabilité  $p = \frac{1}{4}$ , ou Dominique donne une mauvaise réponse.

On effectue cette expérience élémentaire 10 fois et de façon indépendante.

La variable aléatoire  $X$  qui compte le nombre de bonnes réponses à ce QCM suit donc la loi binomiale de paramètres  $n = 10$  et  $p = \frac{1}{4}$ .

2. La probabilité que Dominique obtienne exactement 5 bonnes réponses est :

$$P(X = 5) = \binom{10}{5} \times \left(\frac{1}{4}\right)^5 \times \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{10-5} \approx 0,0584$$

3. L'espérance de  $X$  est  $E(X) = np = 10 \times \frac{1}{4} = 2,5$ .

En procédant comme Dominique, un élève aura en moyenne 2,5 bonnes réponses.

4. On suppose dans cette question qu'une bonne réponse rapporte un point et qu'une mauvaise réponse fait perdre 0,5 point. La note finale peut donc être négative.

On note  $Y$  la variable aléatoire qui donne le nombre de points obtenus.

- a. Pour réaliser l'évènement ( $Y = 10$ ), il faut que toutes les réponses soient justes donc :  $P(Y = 10) = P(X = 10) = \left(\frac{1}{4}\right)^{10}$ .

**b.** On peut calculer la valeur de  $Y$  en fonction de celle de  $X$

- On a vu que ( $Y = 10$ ) équivailait à ( $X = 10$ ).
- Si  $X = 9$ , il y a 9 bonnes réponses qui rapportent 9 points, et une mauvaise réponse qui en retire un demi; donc  $Y = 8,5$ .
- Si  $X = 8$ , il y a 8 bonnes réponses qui rapportent 8 points, et deux mauvaises réponses qui retirent deux demi-points; donc  $Y = 7$ .
- Etc.

On regroupe tous les résultats possibles dans un tableau.

$X$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$Y$	-5	-3,5	-2	-0,5	1	2,5	4	5,5	7	8,5	10

Donc la note finale de Dominique est positive à partir de 4 bonnes réponses.

**c.** D'après le tableau précédent,  $P(Y \leq 0) = P(X \leq 3)$ .

Donc  $P(Y \leq 0) \approx 0,78$ .

**d.**  $X$  prend toutes les valeurs entières entre 0 et 10.

Pour  $X$  bonnes réponses qui rapportent  $X$  points, il y en a  $10 - X$  mauvaises qui retirent  $0,5(10 - X)$  points.

Donc  $Y = X - 0,5(10 - X) = X - 5 + 0,5X = 1,5X - 5$ .

**e.** D'après la linéarité de l'espérance mathématique, on a :

$$E(Y) = E(1,5X - 5) = 1,5 \times E(X) - 5 = 1,5 \times 2,5 - 5 = -1,25.$$